PART4　２次曲線の平行移動

要点整理と公式

要点 ①　方程式 $f(x,\ y)=0$ の表す曲線

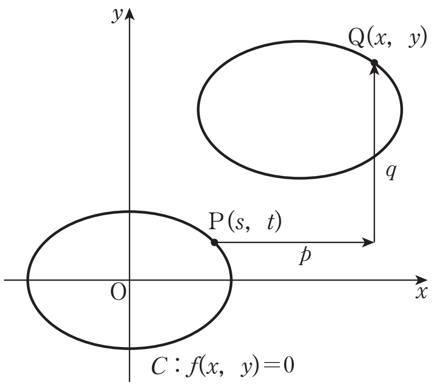
座標平面上で x，y の方程式 $f(x,\ y)=0$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体が曲線を表すとき，
この曲線を方程式 $(x,\ y)=0$ の表す曲線，または曲線 $(x,\ y)=0$ という。
またこのとき，この方程式 $(x,\ y)=0$ を，この曲線の方程式という。

(ex) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0 \iff \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　　これは「　　　」の方程式

要点 ②　曲線の平行移動

方程式 $f(x,\ y)=0$ で表される曲線 C を
x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した
曲線 C' の方程式を求める。
この平行移動によって，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ が
C' 上の点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に移されるとすると

$$\begin{cases} x=s+p \\ y=t+q \end{cases}\quad よって\quad \begin{cases} s=x-p \\ t=y-q \end{cases}\quad \cdots\cdots①$$



また，点 P は C 上の点より

$$f(s,\ t)=0 \quad \cdots\cdots②$$

①，②より　$f(x-p,\ y-q)=0$　　　これが曲線 C' の方程式である。

曲線の平行移動

曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$$f(x-p,\ y-q)=0$$

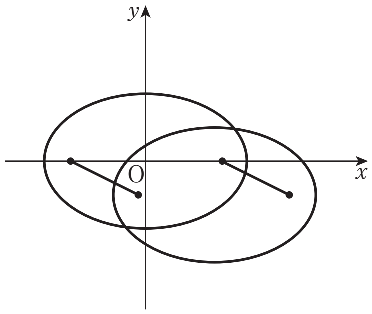
(ex) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$　……①を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した
楕円の方程式は

$$\frac{(x\qquad)^2}{9}+\frac{(y\qquad)^2}{4}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

楕円①の焦点は $(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$であるから，

楕円②の焦点は $(\sqrt{5}\qquad,\qquad)$，

$(-\sqrt{5}\qquad,\qquad)$



要点 ③ 2次曲線の方程式

「2次曲線」 … x，y の2次式で表される曲線

一般的に，2次曲線は

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$$

の形で表されることが知られている。

特に

放物線 $y^2=4px$ $x^2=4py$

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

のように，方程式が「標準形」で表される2次曲線を平行移動した曲線の方程式は

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

の形で表される。

(ex) $\dfrac{(x+1)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ ……①の分母を払って整理すると

$$4x^2+9y^2+8x-54y+49=0 \quad \cdots\cdots ②$$

となる。

逆に，②を①の形に変形することで，②が表す図形が

楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

を x 軸方向に　　，y 軸方向に　平行移動した楕円を表すことがわかる。

4 (1) 次の 2 次曲線を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(i) $y^2=2x$　　(ii) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(iii) $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(2) 次の方程式はどのような図形を表すか。

(i) $y^2+x-4y+6=0$

(ii) $9x^2-4y^2-18x-24y+9=0$

Point Pickup

曲線の平行移動

曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$f(x\qquad,\ y\qquad)=0$

つまり，移動前の式において，x を x　　に，y を y　　におき換えたもの。

2 次曲線の平行移動

2 次方程式 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ について

$(y-q)^2=4P(x-p)$ の形に変形できるとき，「　　　」$y^2=4Px$ を

$\dfrac{(x-p)^2}{A^2}+\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$ の形に変形できるとき，「　　　」$\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を

$\dfrac{(x-p)^2}{A^2}-\dfrac{(y-q)^2}{B^2}=1$ の形に変形できるとき，「　　　」$\dfrac{x^2}{A^2}-\dfrac{y^2}{B^2}=1$ を

それぞれ x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した図形を表す。

第 1 講 PART4 確認問題

次の 2 次曲線を[　　]内のように平行移動したあとに得られる曲線の方程式を求めよ。また，その曲線の焦点を求めよ。

ただし，答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $y^2=4x$　[x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動]

方程式 ア

① $y^2-1=4x-2$　② $y^2-1=4(x-2)$

③ $(y-1)^2=4(x-2)$　④ $(y+1)^2=4(x+2)$

焦点 イ

① (1，3)　② (3，1)

③ (6，1)　④ (−1，−1)

2 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$　[x 軸方向に 1, y 軸方向に −2 だけ平行移動]

方程式 ウ

① $\dfrac{x^2-1}{2}+\dfrac{y^2+2}{6}=1$

② $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=1$

③ $\dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(y-2)^2}{6}=1$

④ $\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+2)^2}{6}=-1$

焦点 エ

① (1，0)，(1，−4)　② (1，2)，(1，−6)

③ (−1，0)，(−1，4)　④ (−1，−2)，(3，−2)

3 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$　［x 軸方向に 2, y 軸方向に 3 だけ平行移動］

方程式 オ

① $\dfrac{x^2-2}{5}-\dfrac{y^2-3}{4}=1$

② $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

③ $\dfrac{(x+2)^2}{5}-\dfrac{(y+3)^2}{4}=1$

④ $\dfrac{(x-2)^2}{5}-\dfrac{(y-3)^2}{4}=-1$

焦点 カ

① (1, 3), (3, 3)　② (5, 3), (−1, 3)

③ (1, −3), (−5, −3)　④ (3, −1), (3, 5)

次の問いについて，キ，ケ は下の①～④のうちから，

ク，コ は⑤～⑧のうちから選べ。

4 曲線 $y^2-2x-2y+7=0$ は，放物線 キ を ク だけ平行移動したものである。

① $y^2=x$　② $y^2=2x$

③ $y^2=-2x$　④ $x^2=2y$

⑤ x 軸方向に 1，y 軸方向に 2

⑥ x 軸方向に 1，y 軸方向に 3

⑦ x 軸方向に 3，y 軸方向に 1

⑧ x 軸方向に −3，y 軸方向に −1

5 曲線 $2x^2-3y^2-8x-6y-1=0$ は，双曲線 [ケ] を [コ] だけ平行移動したものである。

① $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=1$　　② $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{3}=-1$

③ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=1$　　④ $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{2}=-1$

⑤ x 軸方向に 1，y 軸方向に 2

⑥ x 軸方向に -1，y 軸方向に 2

⑦ x 軸方向に 2，y 軸方向に -1

⑧ x 軸方向に -2，y 軸方向に 1

PART4　2次曲線の平行移動

4　(1)　次の2次曲線を x 軸方向に3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線の方程式を求めよ。また，その焦点を求めよ。

(i)　$y^2=2x$　　(ii)　$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$　　(iii)　$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$

(2)　次の方程式はどのような図形を表すか。

(i)　$y^2+x-4y+6=0$

(ii)　$9x^2-4y^2-18x-24y+9=0$

[解答]

(1)(i)　$y^2=4\cdot\dfrac{1}{2}x$ より，移動前の放物線の焦点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$

移動後の放物線の方程式は $(y+2)^2=2(x-3)$　　焦点の座標は $\left(\dfrac{7}{2},\ -2\right)$

(ii)　移動前の楕円の焦点の座標は

$(0,\ \sqrt{9-5})$，$(0,\ -\sqrt{9-5})$　すなわち $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$

移動後の楕円の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

焦点の座標は　$(3,\ 0)$，$(3,\ -4)$

(iii)　移動前の双曲線の焦点の座標は

$(\sqrt{4+1},\ 0)$，$(-\sqrt{4+1},\ 0)$　すなわち　$(\sqrt{5},\ 0)$，$(-\sqrt{5},\ 0)$

移動後の双曲線の方程式は $\dfrac{(x-3)^2}{4}-(y+2)^2=1$

焦点の座標は $(\sqrt{5}+3,\ -2)$，$(-\sqrt{5}+3,\ -2)$

(2)(i)　$(y-2)^2-4+x+6=0$

$(y-2)^2=-x-2$

$(y-2)^2=-(x+2)$

よって，放物線 $y^2=-x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に2だけ平行移動した放物線を表す。

(ii)　$9(x^2-2x)-4(y^2+6y)+9=0$

$9\{(x-1)^2-1\}-4\{(y+3)^2-9\}+9=0$

$$9(x-1)^2-4(y+3)^2=-36$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{9}=-1$$

よって，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=-1$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -3 だけ平行移動した双曲線を表す。

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：②

[解説]

$$y^2=4x$$

$$y^2=4\cdot 1\cdot x$$

この放物線の焦点の座標は，(1，0)

よって，移動後の放物線の方程式は，

$$(y-1)^2=4(x-2)$$ [A]

焦点の座標は，

(3，1) [B]

[A]　曲線 $f(x,\ y)=0$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は，
$f(x-p,\ y-q)=0$

[B]　焦点も x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動したものになる。

2　**[正解]** ウ：②，エ：①

[解説]

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{6}=1$$

$\sqrt{6-2}=2$ より，この楕円の焦点の座標は，

(0，2)，(0，−2) [C]

よって，移動後の楕円の方程式は，

$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{6}=1$$

焦点の座標は，

(1，0)，(1，−4)

[C]　焦点は y 軸上にある。

3　**[正解]** オ：②，カ：②

[解説]

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$$

$\sqrt{5+4}=3$ より，この双曲線の焦点の座標は，

$(3,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

よって，移動後の双曲線の方程式は，

$$\frac{(x-2)^2}{5}-\frac{(y-3)^2}{4}=1$$

焦点の座標は，

$(5,\ 3)$，$(-1,\ 3)$

4　**[正解]** キ：②，ク：⑦

[解説]

$y^2-2x-2y+7=0$

$(y-1)^2-1-2x+7=0$ [D]

$(y-1)^2=2x-6$

$(y-1)^2=2(x-3)$

よって，この曲線は，放物線 **$y^2=2x$** を

x 軸方向に 3，**y 軸方向に 1** だけ

平行移動したものである。[E]

[D]　式を $(y-q)^2=4a(x-p)$ の形に変形する。

[E]　曲線 $(y-q)^2=4a(x-p)$ は，放物線 $y^2=4ax$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

5　**[正解]ケ：③，コ：⑦**

[解説]

$$2x^2-3y^2-8x-6y-1=0$$

$$2(x^2-4x)-3(y^2+2y)-1=0$$

$$2\{(x-2)^2-4\}-3\{(y+1)^2-1\}-1=0$$

$$2(x-2)^2-3(y+1)^2=6$$

$$\frac{(x-2)^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{2}=1$$

よって，この曲線は，双曲線 $\boldsymbol{\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1}$ を

x 軸方向に 2，y 軸方向に −1 だけ

平行移動したものである。[F]

［F］ 曲線 $\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ は，双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである。